数理解析研究所講究録
821巻 1993年 47-55

フォンノイマンの不等式

山形大工学部　　高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)
東京電機大工学部　鶴見和之 (Kazuyuki Turumi)

概　要

von Neumann の不等式に対する Lewis-Wermer-Cole の考え方を紹介し、その応用としてコハイポノーマル作用素に関する不等式を導く。また von Neumann の不等式に対する Ky Fan の考え方を紹介し、この不等式の一つの一般化を与え、単葉凸函数に関する一つの問題を提示する。

von Neumann の不等式

B(H) をヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素のつくるバナッハ環とする。$T \in B(H)$ とそのスペクトル $\sigma(T)$ の近傍で正則な複素函数 $f(z)$ に対して、通常の Riesz-Dunford 積分

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - T} d\lambda$$

を考える。ここでΓは $\sigma(T)$ を囲む閉曲線である。D を単位開円盤とするとき、von Neumann (1951) は次の定理を示した。

定理V。T を H 上の縮小作用素、f を単位閉円盤 D^- の近傍で正則な複素函数とする。このとき、$|f(z)| \leq 1$ $(\forall z \in D^-)$ ならば $\|f(T)\| \leq 1$ である。

定理Vの見方 I

Lewis-Wermer-Cole [4] は上の定理Vに関して次のような考察を行った。

$\{z_1, \ldots, z_n\}$ を D 内の固定された相異なる n 個の点とする。このとき、次の不等式を満たす D 内の n 個の点 $\{w_1, \ldots, w_n\}$ は $\{z_1, \ldots, z_n\}$ に関して Pick の条件を満たすと言う：

$$\sum_{ij}(1 - z_i\bar{z}_j)^{-1} w_i \bar{w}_j h_i \bar{h}_j \leqq \sum_{ij}(1 - z_i\bar{z}_j)^{-1} h_i \bar{h}_j \quad (\forall h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{C})$$

$\mathbb{C}^n$ を通常の n 次元ヒルベルト空間とする。

$$T = \mathrm{dig}(w_1, \ldots, w_n), \quad S = \mathrm{dig}(z_1, \ldots, z_n)$$

且つ

$$A = ((1 - z_j\bar{z}_i)^{-1})_{ij}$$

と置く。このとき、上の Pick の条件は $T^*AT \leqq A$ を意味する。更に

$$\begin{aligned} T^*AT \leqq A &\Leftrightarrow A^{-1/2}T^*ATA^{-1/2} \leqq 1 \\ &\Leftrightarrow (A^{1/2}TA^{-1/2})^*(A^{1/2}TA^{-1/2}) \leqq 1 \\ &\Leftrightarrow \| A^{1/2}TA^{-1/2} \| \leqq 1 \end{aligned}$$

である。しかし、

$$(ASh, Sh) - (Ah, h) = -| \Sigma h_i |^2 \leqq 0 \ (\forall h \in \mathbb{C}^n)$$

であるから、$S^*AS \leqq A$、従って上の議論から $\| A^{1/2}SA^{-1/2} \| \leqq 1$ でる。それ故、もし $\| f \|_\infty \leqq 1$ 且つ $f(z_i) = w_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満たす $f \in A(D^-)$ が存在したなら、$T = f(S)$ である。今任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\| p - f \| < \varepsilon$ 且つ $\| p \|_\infty \leqq 1$ となる多項式 $p = p(z)$ を選べ。このとき定理Vから

$$\| p(A^{1/2}SA^{-1/2}) \| \leqq 1$$

である。しかし $p(A^{1/2}SA^{-1/2}) = A^{1/2}p(S)A^{-1/2}$ であるから、

$$\begin{aligned} \| A^{1/2}TA^{-1/2} \| &\leqq \| A^{1/2}p(S)A^{-1/2} \| + \| A^{1/2}(f(S) - p(S))A^{-1/2} \| \\ &\leqq 1 + \| A^{1/2} \| \, \| A^{-1/2} \| \, \| (f - p)(S) \| \\ &\leqq 1 + \| A^{1/2} \| \, \| A^{-1/2} \| \max_{1 \leqq i \leqq n} | (f - p)(z_i) | \\ &\leqq 1 + \| A^{1/2} \| \, \| A^{-1/2} \| \, \varepsilon \end{aligned}$$

である。$\varepsilon \downarrow 0$ として、$\| A^{1/2}TA^{-1/2} \| \leqq 1$、結局 $T^*AT \leqq A$ を得る。

上の Lewis-Wermer-Cole の考え方を応用すると、定理Vを僅かに拡張する次の命題を得る。

命題1。T をヒルベルト空間 H 上の縮小写像、A を $T^*A^*AT \leqq A^*A$ を満たす H 上の有界線形作用素、f を単位閉円盤 D^- の近傍で正則な複素函数とする。このとき、$| f(z) | \leqq 1$ $(\forall z \in D^-)$ ならば、$f(T)^*A^*Af(T) \leqq A^*A$ が成り立つ。

証明。今 $B_n = A^*A + 1/n$ と置く。従って B_n は可逆的正作用素である。さて

$$(x, y)_A = (B_n x, y) \quad (x, y \in H)$$

と置けば、$(H, (,)_A)$ はヒルベルト空間となる。このとき、

$$T^*B_nT \leqq T^*A^*AT + n^{-1}T^*T \leqq A^*A + 1/n = B_n$$

それ故 $\|T\|_A \leqq 1$ である。従って定理Vから $\|f(T)\|_A \leqq 1$ を得る。しかしこの式は $f(T)^*B_nf(T) \leqq B_n$ と同値であるから、$n \to \infty$ として、$f(T)^*A^*Af(T) \leqq A^*A$ を得る。　　（証明終わり）

系。T をヒルベルト空間上の縮小写像、f を単位閉円盤 D^- の近傍で正則で $|f(z)| \leqq 1$ $(\forall z \in D^-)$ を満たす複素函数とする。このとき、$f(T)^*T^*Tf(T) \leqq T^*T$ である。更に T がコハイポノーマル (i.e., $T^*T \leqq TT^*$) であれば、$f(T)^*TT^*f(T) \leqq TT^*$ である。

証明。T は縮小写像であるから、$T^*T^*TT \leqq T^*T$ が成り立つ。従って上の命題で $A = T$ と置いて、$f(T)^*T^*Tf(T) \leqq TT^*$ を得る。また T がコハイポノーマルであれば、$T^*TT^*T = (T^*T)^2 \leqq T^*T \leqq TT^*$ であるから、上の命題で $A = T^*$ と置いて、$f(T)^*TT^*f(T) \leqq TT^*$ を得る。　　（証明終わり）

定理Vの見方II

Ky Fan [2] は次の定理を得た。

定理F。T をヒルベルト空間 H 上のプロパーな縮小写像（i.e., $\|T\| < 1$）f を単位開円盤 D 上の正則函数で $f(D) \subset D$ を満たすものとする。このとき、$\|f(T)\| < 1$ である。

注意1。この定理は彼自身も [2] で述べているように、定理Vと同値である。

さて D 上の有界正則函数のつくる可換バナッハ環（ハーディ環） $H^\infty(D)$ を考え、$\|T\| < 1$ なる T に対して、

$$\pi_T(f) = f(T) \quad (f \in H^\infty(D))$$

と置くと、π_T は $H^\infty(D)$ から $B(H)$ への以下の性質を満たす準同型写像となる。

(1) $\pi_T(1) = I_H$.

(2) $\pi_T(z) = T$ $(z : z \to z$ なる函数).

(3) π_T は $H^\infty(D)$ 上の広義一様収束位相と $B(H)$ 上のノルム位相に関して連続である。。

このとき、定理Fから、

(4) $\|\pi_T(f)\| \leqq \|f\|_\infty$ $(\forall f \in H^\infty(D))$.

である。

実際、$f \in H^\infty(D)$ に対して、$g = f/(\|f\|_\infty + \varepsilon)$ と置けば、$g(D) \subset D$であるから、定理Fより、$\|\pi_T(g)\| < 1$、従って、$\|\pi_T(f)\| < \|f\|_\infty + \varepsilon$、それ故 $\varepsilon \downarrow 0$ として、$\|\pi_T(f)\| \leqq \|f\|_\infty$ を得る。次に任意のプロパー縮小写像 T に対して (4) が成り立つと仮定する。このとき定理Vを導くために、T を縮小写像、f を D^- のある近傍 U で正則な複素関数で

$$|f(z)| \leqq 1 \quad (\forall z : |z| \leqq 1)$$

を満たすとする。このとき、

$$f_k(z) = f(\alpha_k z) \quad (z \in U), \quad \alpha_k = k/(k+1) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

と置けば、$\{f_k\}$ は D^- のあるコンパクト近傍 K で有界列となるから、Montel の定理より $\{f_k\}$ の部分ネット $\{f_{k'}\}$ が存在して、

$$\lim_{k'} \sup_{z \in K} |f_{k'}(z) - f(z)| = 0$$

である。一方簡単な計算から、$f(\alpha_{k'} T) = f_{k'}(T)$、従って仮定より、

$$\|f_{k'}(T)\| = \|f(\alpha_{k'} T)\| \leqq \|f\|_\infty$$

となるが、

$$\lim_{k'} \|f_{k'}(T) - f(T)\| = 0$$

であるため ([1], p.33 参照)、$\|f(T)\| \leqq \|f\|_\infty$ を得る。

以上から定理F、定理V及び不等式 (4) の三つは同値であることが分かる。我々は、上の定理を僅かに拡張する次の結果を証明する。

命題2。ρ を $H^\infty(D)$ から $B(H)$ への準同型写像で、以下の条件を満たすものとする。

(1') $\rho(1) = I_H$.

(2') $\|\rho(z)\| \leqq 1$ ($z : z \to z$ なる函数).

(3') ρ は $H^\infty(D)$ 上の広義一様収束位相と $B(H)$ 上の弱位相に関して連続で

ある。

このとき、$\|\rho(f)\| \leqq \|f\|_\infty$ $(\forall f \in H^\infty(D))$ が成り立つ。

証明。$f \in H^\infty(D)$ とする。今

$$f_k(z) = f(\alpha_k z) \ (z \in D),\quad \alpha_k = k/(k+1) \ (k = 1, 2, \ldots)$$

と置けば、$\|f_k\|_\infty \leqq \|f\|_\infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$ である。それ故、Montel の定理から広義一様収束する $\{f_k\}$ の部分ネット $\{f_{k'}\}$ が存在する。勿論 $\{f_k\}$ は f に各点収束するから、$\{f_{k'}\}$ は f に広義一様収束する。従って、$\{\rho(f_{k'})\}$ は f に弱収束する。更に、$\rho(f_{k'}) = f(\alpha_{k'}\rho(z))$ が成り立つ。実際、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda| = r} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}}\, d\lambda$$

且つ

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda| = r} \frac{f_{k'}(\lambda)}{\lambda^{n+1}}\, d\lambda,$$

と置け。但し $0<r<1$ である。このとき、$b_n = (\alpha_{k'})^n a_n$ であることが容易に分かる。従って

$$\rho(f_{k'}) = \lim_{N\to\infty} \rho\left(\sum_{n=0}^{N} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\rho(z))^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\alpha_{k'}\rho(z))^n$$
$$= f(\alpha_{k'}\rho(z))$$

である。さて、$\varepsilon>0$ とし、次の条件を満たす $\xi \in H$ を選べ。

$$\|\rho(f)\|^2 < (\rho(f)\rho(f)^*\xi \mid \xi) + \varepsilon \ \text{and} \ \|\xi\| \leqq 1$$

従って、十分大きな k' に対して

$$(\rho(f)\rho(f)^*\xi \mid \xi) < |(\rho(f_{k'})\rho(f)^*\xi \mid \xi)| + \varepsilon$$

が成り立つ。 それ故、$\|\alpha_{k'}\rho(z))\| < 1$ に注意して不等式 (4) から

$$\begin{aligned}\|\rho(f)\|^2 &< |(\rho(f_{k'})\rho(f)^*\xi \mid \xi)| + \varepsilon \\ &\leqq \|\rho(f_{k'})\|\,\|\rho(f)\| + \varepsilon \\ &= \|f(\alpha_{k'}\rho(z))\|\,\|\rho(f)\| + \varepsilon \\ &\leqq \|f\|_\infty\|\rho(f)\| + \varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つが、ここで $\varepsilon\downarrow 0$ として $\|\rho(f)\| \leqq \|f\|_\infty$ を得る。（証明終わり）

注意２。

$$\mathrm{Rep}_1(H^\infty(D);H) = \{\pi_T : T \in B(H),\ \|T\| < 1\}$$

$\mathrm{Rep}_2(H^\infty(D);H) = \{\rho$: 次の条件を満たす H 上に作用する $H^\infty(D)$ の表現：
(1') $\rho(1) = I_H$,
(2") $\|\rho(z)\| < 1$,
(3') ρ : 広義一様収束位相と弱位相に関して連続$\}$

$\mathrm{Rep}_3(H^\infty(D);H) = \{\rho$: 次の条件を満たす H 上に作用する $H^\infty(D)$ の表現：
(1') $\rho(1) = I_H$,
(2') $\|\rho(z)\| \leq 1$,
(3') ρ : 広義一様収束位相と弱位相に関して連続$\}$

このとき、

$$\mathrm{Rep}_1(H^\infty(D);H) = \mathrm{Rep}_2(H^\infty(D);H) \subset \mathrm{Rep}_3(H^\infty(D);H)$$

$$\exists H : \mathrm{Rep}_2(H^\infty(D);H) \subsetneq \mathrm{Rep}_3(H^\infty(D);H)$$

実際、

$$\mathrm{Rep}_1(H^\infty(D);H) \subset \mathrm{Rep}_2(H^\infty(D);H) \subset \mathrm{Rep}_3(H^\infty(D);H)$$

は明か。また $\rho \in \mathrm{Rep}_2(H^\infty(D);H)$ として、$T = \rho(z)$ と置く。従って

$$\pi_T(f) = f(\rho(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\rho(z))^n = \lim_{N\to\infty} \rho\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right) = \rho(f)$$

がすべての $f \in H^\infty(D)$ に対して成り立つ。つまり $\pi_T = \rho$ が成り立つ。 それ故、

$$\mathrm{Rep}_1(H^\infty(D);H) = \mathrm{Rep}_2(H^\infty(D);H)$$

である。

次に $C^b(D)$ を D 上の有界連続函数のつくる可換 C^*-環、$L^2(D)$ を D 上のルベーグ測度に関して L^2-有界な函数のつくるヒルベルト空間とする。

$$\rho(f)(g) = fg \quad (\forall f \in C^b(D),\ \forall g \in L^2(D))$$

と置く。このとき ρ は $C^b(D)$ の $L^2(D))$ 上の等距離＊-表現となっている。また (1'), (2') は明かに成立する。(3') を示す。セミノルム系

$$\{T \to |(Tg,h)| : g,h \in L^2(D),\ g \text{ はコンパクトな台を持つ}\}$$

の定義する局所凸位相は弱位相に同値である。何故ならコンパクトな台を持つ L^2-函数全体は $L^2(D)$ の中でデンスであるからである。そこで、$\{f_\lambda\} \subset L^2(D)$ がゼロに広義一様収束したと仮定して、$g, h \in L^2(D)$（但し g はコンパクトな台を持つ）に対して、$\lim (\rho(f_\lambda)g, h) = 0$ を示す。K を g の台とする。任意の $\varepsilon >$ 0 に対して、

$$\max\{|f_\lambda(z)| : z \in K\} < \varepsilon \quad (\lambda >> 0)$$

従って、

$$|(\rho(f_\lambda)g, h)| = |\int_K f_\lambda g\bar{h}dz| \leqq \varepsilon \int |gh| dz \leqq \varepsilon \|g\|_2 \|f\|_2$$

が十分大きな λ に対して成り立つ。その結果 ρ は広義一様収束位相と弱位相に関して連続である。つまり（3'）が成り立つ。しかし $\|\rho(z)\| = \|z\|_\infty = 1$ であるから、$\rho | H^\infty(D) \in Rep_3(H^\infty(D);H) \setminus Rep_2(H^\infty(D);H)$ である。

注意３。Ky Fan [2] は、f が D 上の正規化された単葉凸函数なら、

$$\{\rho(f) : \rho \in Rep_1(H^\infty(D);H)\}$$

もまた凸集合となるかと言う問題を出し、J. S. Hwang [3] が否定的解答を与えたが、少し広い立場から

$$\{\rho(f) : \rho \in Rep_3(H^\infty(D);H)\}$$

が凸集合となるかと言う問題が考えられる。

注意４。$(G, +)$ を可換離散群、$L^1(G)$ を G 上の群環とする。このとき、$G \neq \{0\}$であれば、定理Ｖで $B(H)$ を $L^1(G)$ に置き換えることはできない。

実際、$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ を任意の多項式、t を 無限位数を持つ G の任意の元とする。このとき、$p(\delta_t) = a_0 + a_1\delta_t + \ldots + a_n\delta_{nt}$ であるから、

$$\|p(\delta_t)\|_1 = |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|.$$

一方 $\|\delta_t\|_1 = 1$ であるから、もし定理Ｖの不等式が成り立てば、

$$|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| \leqq \sup_{z \in D} |p(z)|$$

が成り立たなければならない。これは矛盾。

上の証明及び多項式 $P(z) = 1 + z - z^2$ を考えれば、t が位数２以上でもよい。また t が位数１を持てば、もし定理Ｖの不等式が成り立てば、

$$|a_1| + |a_0 - a_2| \leq \sup_{z \in D} |a_0 + a_1 z + a_2 z^2|$$

がすべての $a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{C}$ について成り立つことになり、矛盾。

また閉区間 $[a, b]$ 上の n 回連続微分可能な複素関数のつくる可換バナッハ環 $C^n[a, b]$ に対しても、$1 \leq n$ であれば、同じことが言える。

上の注意から、バナッハ関数環 A が

$$\| f(x) \| \leq \| f \|_\infty \quad (\forall f \in H^\infty(D), \forall x \in A : \| x \| < 1)$$

を満たせば、A は函数環となってしまうような気がするが証明はできない。

一般に A を単位元をもつバナッハ環、x を $\| x \|_\sigma < r < 1$ なる A の元とする。但し $\| x \|_\sigma$ は x のスペクトル半径を表す。このとき、$H^\infty(D)$ の任意の元 f に対して、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = r} \frac{f(\lambda)}{\lambda - x} d\lambda$$

を考える。このとき、$\pi_x(f) = f(x)$ と置くと、π_x は $H^\infty(D)$ から A への準同型写像で、広義一様収束に関してノルム連続である（[1], p.33 参照）。また

$$\frac{1}{\lambda - x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} x^n \quad (|\lambda| = r)$$

であるから、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = r} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

と置けば、

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n \quad (\text{D 上広義一様収束})$$

且つ、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\lambda)}{\lambda^{n+1}} x^n d\lambda$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (\text{ノルム収束})$$

が成り立つ。従って $A(1, x)$ を $\{1,\ x\}$ で生成された A の可換閉部分環とするとき、

$$\{f(x) : f \in H^{\infty}(D)\} \subset A(1, x)$$

が成り立つ。いま f(x) を A の元と見たときのスペクトル半径を $\|f(x)\|_{\sigma}$ で表す。また f(x) を A(1, x) の元と見たときのスペクトル半径を $\|f(x)\|'_{\sigma}$ で表す。 従って、$\|f(x)\|_{\sigma} \leqq \|f(x)\|'_{\sigma}$ が成り立つ。ところで A(1, x) のキャリア空間をΦとすると、任意の $\varphi \in \Phi$ に対して、$\varphi \circ \pi_x$ は $H^{\infty}(D)$のキアリア空間に属するから、$|\varphi(f(x))| \leqq \|f\|_{\infty}$ が成り立つ。以上から我々は次の命題を得る。

命題3。 A を単位的バナッハ環、x を$\|x\|_{\sigma}<1$ を満たす A の元とする。このとき $\|f(x)\|_{\sigma} \leqq \|f\|_{\infty}$ $(\forall f \in H^{\infty}(D))$ が成り立つ。

注意5。一般に $\|x\|<1$ なる $x \in A$ に対して、

$$\|f(x)\| \leqq (1 - \|x\|)^{-1}\|f\|_{\infty} \quad (\forall f \in H^{\infty}(D))$$

が成り立つ。従って

$$\|\pi_x\| \leqq (1 - \|x\|)^{-1} \quad (\forall x \in A : \|x\| < 1)$$

である。

参 考 文 献

1. F. Bonsall and J. Duncan, "Complete Normed Algebras," Springer-Verlag, New York/Berlin, 1973.
2. Ky Fan, Analytic functions of a proper contraction, Math. Z. **160** (1978), 275-290.
3. J. S. Hwang, A problem on the Riesz-Dunford operator calculus and convex univalent functions, Glasgow Math. J. **24**(1983), 129-130.
4. K. Levis and J. Wermer, On the theorems of Pick and von Neumann, in "Function Spaces" (K. Jarosz, Ed.), pp. 273-280, Marcel-Dekker, Inc. 1992.